მომხმარებლის დანაზოგის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით

მაკა ლომთაძე
განათლების აკადემიური დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი,
ქუთაისის უნივერსიტეტი; ბიზნესისა და ტექნოლოგიების უნივერსიტეტი
maka.lomtadze@unik.edu.ge

საკვანძო სიტყვები: *განსაზღვრული ინტეგრალი; მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი; მოთხოვნის ფუნქცია; მომხმარებლის დანაზოგი*

J.E.L. classification: C1, D60 DOI: https://doi.org/10.52244/ep.2024.27.07

ციტირებისთვის: ლომთაძე მ., (2024) მომხმარებლის დანაზოგის გამოთვლა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით. ტ. 19, 1(27), გვ. 85–90. DOI: https://doi.org/10.52244/ep.2024.27.07

ანოტაცია. *მათემატიკური მეთოდების დაუფლება მრავალმხრივ აუცილებელია ეკონომიკისა და ბიზნესის ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის. თანამედროვე კვლევებში და სახელმძღვანელოებში ავტორები აღნიშნავენ, რომ ეკონომიკის თეორიის საფუძვლიანი შესწავლა შეუძლებელია მათემატიკის კარგი ცოდნის გარეშე. მათემატიკა ეკონომისტებისთვის წარმოადგენს მძლავრ დამატებით იარაღს მის წინაშე მდგომი განსაკუთრებით რთული პრობლემების გადასაჭრელად. სტატიაში შესწავლილია ის საკითხი, რომელიც ხშირად გვხვდება ეკონომიკისა და ბიზნესის თეორიაში, კერძოდ განხილულია გარკვეულ დონეზე ვაჭრობისას მომხმარებლის დანაზოგის გამოთვლის მეთოდი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით.*

შესავალი

სტატიაში დამყარებულია ინტერდისციპლინური კავშირი განსაზღვრულ ინტეგრალსა და გარკვეული ტიპის ეკონომიკურ ამოცანებს, კერძოდ Q_0 დონეზე ვაჭრობისას მომხმარებლის დანაზოგის გამოთვლას შორის. სტატიის მიზანია ეკონომიკის სპეციალობის სტუდენტებს უმაღლესი მათემატიკის საკითხების შესწავლის პარალელურად შევასწავლოთ მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით ეკონომიკური ამოცანების ამოხსნის მარტივი მეთოდები. ამ მიზნით სტატიაში განხილულია რამდენიმე ამოცანა, რაც ვფიქრობთ, სტუდენტებისთვის საინტერესო და ადვილად ასათვისებელი იქნება. ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნების მეთოდების შესწავლა საშუალებას მოგვცემს გამოვიკვლიოთ და გავაანალიზოთ აღნიშნული ტიპის მოდელები.

ძირითადი ნაწილი

განსაზღვრული ინტეგრალის თეორია მათემატიკური ანალიზის უმნიშვნელოვანეს ნაწილს წარმოადგენს. იგი ფართოდ გამოიყენება მეცნიერების სხვადასხვა სფეროში და მრავალი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტის ინსტრუმენტია. სტატიაში განხილულია ეკონომიკური პრობლემა, რომლის გადაჭრა განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით საკმაოდ მარტივია.

განსაზღვრული ინტეგრალის ცნების შემოსაღებად განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქცია. ამ $f(x)$ ფუნქციისთვის განსაზღვრული ინტეგრალი გეომეტრიულად წარმოადგენს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია მოცემული $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკით $x = a$, $x = b$ წრფეებით და ox ღერძით

(Thomas et al., 2014).
განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ხდება ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

სადაც, $F(x)$ არის მოცემული $f(x)$ ფუნქციის პირველადი ფუნქცია

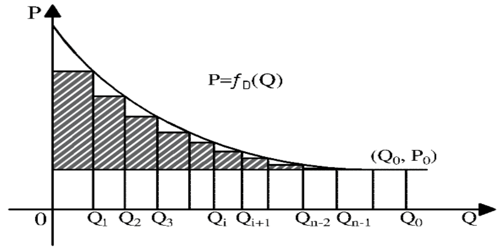
დავამყაროთ ინტერდისციპლინური კავშირი განსაზღვრულ ინტეგრალსა და ეკონომიკურ ამოცანებს, კერძოდ, Q_0 დონეზე ვაჭრობისას მომხმარებლის დანაზოგის გამოთვლას შორის.

დავუშვათ მოთხოვნის ფუნქციაა $P = f_D(Q)$, რომელიც წარმოადგენს პროდუქციის ერთეულის ფასს, როდესაც იყიდება Q რაოდენობის მოხმარების პროდუქცია, რომელიც, შეიძლება ითქვას, რომ თითქმის ყოველთვის კლებადი ფუნქციაა Q ცვლადის მიმართ. $P = f_D(Q)$ ფუნქციის შესაბამის გრაფიკს ჩვენ ვუწოდებთ მოთხოვნის წირს.

დავუშვათ რომ, P_0 არის Q_0 რაოდენობის მოთხოვნის დროს ერთეულის ფასი და $P_0 = f_D(Q_0)$

ნახაზი 1

მოთხოვნის წირი



$[O, Q_0]$ შუალედი დავყოთ n ტოლ ნაწილად წერტილებით: $Q_i \ (i = 1, 2, ..., n)$, სადაც $0 < Q_1 < Q_2 < ... < Q_n = Q_0$, თითოეული სეგმენტის სიგრძე ავღნიშნოთ ΔQ სიმბოლოთი, მაშასადამე

$$\Delta Q = Q_1 = Q_2 - Q_1 = ... = Q_i - Q_{i-1} = ... = Q_n - Q_{n-1} = \frac{Q_0}{n},$$

დავუშვათ, პროდუქციაზე მოთხოვნა ტოლია Q_1 ერთეულის, ერთეულის ფასია $f_D(Q_1)$ და $\Delta Q = \frac{Q_0}{n} = Q_1$ რაოდენობის პროდუქცია იყიდება. ΔQ რაოდენობის პროდუქციის შესაძენად გადასახდელი თანხა იქნება $f_D(Q_1)\Delta Q$ -ს ტოლი. ანალოგიურად, როდესაც საქონელზე მოთხოვნა Q_1 ერთეულის ტოლია და ერთეულის ფასია $P_0 = f_D(Q_0)$, იგივე ΔQ რაოდენობის პროდუქციის შეძენა $P_0\Delta Q$ თანხითაა შესაძლებელი . პირველ და მეორე შემთხვევისას მყიდველთა დანაზოგის სხვაობა

$f_D(Q_1)\Delta Q - P_0\Delta Q = \left[f_D(Q_1) - P_0\right]\Delta Q$ -ის ტოლია. ეს დანაზოგი რიცხობრივად ნახ.1 -ზე $[O, Q_1]$ შუალედზე დაშტრიხული არის ფართობის ტოლია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა პროდუქციაზე მოთხოვნა არის Q_2, ერთეულის ფასია $f_D(Q_2)$ და $\Delta Q = \frac{Q_0}{n} = Q_2 - Q_1$ რაოდენობის პროდუქცია იყიდება, ამ შემთხვევაში ΔQ რაოდენობის პროდუქციის ყიდვა $f_D(Q_2)\Delta Q$ რაოდენობის თანხითაა შესაძლებელი. Q_0 რაოდენობის საქონელზე , როცა ერთეულის ფასია $P_0 = f_D(Q_0)$, იგივე ΔQ რაოდენობის საქონლის ყიდვა ისევ $P_0\Delta Q$ თანხითაა შესაძლებელი და მყიდველის დანაზოგი ტოლია: $f_D(Q_2)\Delta Q - P_0\Delta Q = \left[f_D(Q_2) - P_0\right]\Delta Q$ სხვაობის. ეს დანაზოგი რიცხობრივად

$\left[Q_1, Q_2\right]$ შუალედზე დაშტრიხული არის ფართობის ტოლია (იხ. ნახ.1).

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ $\left[Q_2, Q_3\right]$ და ა. შ. ზოგადად $\left[Q_i, Q_{i+1}\right]$ შუალედში ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ. კერძოდ, თუ შევადარებთ Q_{i+1} და Q_0 მოთხოვნის დონეებს ΔQ რაოდენობის საქონლის ყიდვისას მივიღებთ დანაზოგს :

$f_D\left(Q_{i+1}\right)\Delta Q - P_0\Delta Q = \left[f_D\left(Q_{i+1}\right) - P_0\right]\Delta Q$,

სადაც $i = 0,1,2,\ldots n-1$.

ეს დანაზოგი რიცხობრივად ნახ.1 -ზე $\left[Q_i, Q_{i+1}\right]$ შუალედზე დაშტრიხული არის ფართობის ტოლია.

ამ ყველა დანაზოგს თუ შევკრებთ ჯამურ დანაზოგს მივიღებთ $\left[O, Q_0\right]$ შუალედში.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_D\left(Q_{i+1}\right) - P_0\right]\Delta Q \qquad (1)$$

რომელიც გეომეტრიულად ნახ. 1- ზე დაშტრიხული არის ფართობს გამოსახავს.

თუ განვიხილავთ ამ გამოსახულების ზღვარს, როცა $n \to \infty$ და დავუკავშირებთ სტატიის დასაწყისში წარმოდგენილ განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებას შეგვიძლია ვთქვათ რომ ეს არის $\left[O, Q_0\right]$ შუალედში განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$\left(CS\right) = D\left(Q_0, P_0\right) = \int_0^{Q_0}\left[f_D\left(Q\right) - P_0\right]dQ \quad (2)$$

ამ სიდიდეს ეკონომისტები Q_0 დონეზე ვაჭრობისას მომხმარებლის დანაზოგს უწოდებენ, რომელიც გამოსახავს მომხმარებლის დანაზოგს Q_0 რაოდენობის პროდუქციის P_0 ერთეულის ფასად შეძენისას. შეგვიძლია ვთქვათ რომ Q_0 რაოდენობის პროდუქცია მომხმარებელს შეეძლო ეყიდა არა P_0 ფასად, არამედ ნაწილ-ნაწილ $\Delta Q = \frac{Q_0}{n}$ რაოდენობა შეეძინა $f_D\left(Q_1\right)$ ფასად, შემდეგი ΔQ რაოდენობა $f_D\left(Q_2\right)$ ფასად და ა.შ. n-ჯერ ასეთი შესყიდვის დროს მომხმარებელი ყიდულობს Q_0 რაოდენობის პროდუქციას, თუმცა მას უფრო მეტი თანხა ეხარჯება ვიდრე Q_0P_0 თანხაა. ამ სხვაობას აღწერს ჩვენს მიერ მიღებული (2) ფორმულა (Chang, 2005)

მაშასადამე, განსაზღვრული ინტეგრალის გამოყენებით შევძლებთ ვაჭრობისას მომხმარებლის დანაზოგის გამოთვლას, როცა შევადგენთ მოთხოვნის ფუნქციას.

განვიხილოთ ამოცანები (ნატროშვილი და სხვ., 2008)

ამოცანა 1: გამოვთვალოთ მომხმარებლის (CS) დანაზოგი დოლარებში, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა $f_0\left(Q\right) = 100 - Q^2$ და მოთხოვნის დონეა $Q_0 = 8$ -ს.

ამოხსნა: $P_0 = f_D\left(8\right) = 100 - 8^2 = 36$

$$\left(CS\right) = D\left(8,36\right) = \int_0^8\left[f_D\left(Q\right) - P_0\right]dQ = \int_0^8\left[100 - Q^2 - 36\right]dQ = \int_0^8\left[64 - Q^2\right]dQ = \left[64Q - \frac{Q^3}{3}\right]_0^8 = 341\frac{1}{3} \approx 341{,}33$$

დოლარს.

ამოცანა 2: გამოვთვალოთ მომხმარებლის (CS) დანაზოგი დოლარებში, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა $f_0(Q)=1000-0,4Q-0,0003Q^2$ და მოთხოვნის დონეა $Q_0=400$ -ს.

ამოხსნა: $P_0=f_D(400)=1000-0,4\cdot 400-0.0003\cdot 400^2=792$

$$(CS)=D(400,792)=\int_0^{400}\left[f_D(Q)-P_0\right]dQ=\int_0^{400}\left[1000-0,4Q-0,0003Q^2-792\right]dQ=\int_0^{400}\left[208-0,4Q-0,0003Q^2\right]dQ$$

თუ მოვახდენთ ამ ინტეგრალის გამოთვლას ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$(CS)=D(400,792)=\int_0^{400}\left[208-0,4Q-0,0003Q^2\right]dQ=\left[208Q-0,4\frac{Q^2}{2}-0,0003\frac{Q^3}{3}\right]\Bigg|_0^{400}=44800$$

დოლარს.

ლიტერატურა:

1. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., (2014) Thomas' Calculus: Early Transcendentals, Thirteenth Edition, Pearson, New York.
2. Chiang A., (2005) Fundamental Methods of Mathematical Economics", The McGrow-Hill Company, International edition. - 688 pp.
3. ნატროშვილი დ., გიორგაშვილი ლ., ჯაშიშვილი გ., (2008) მათემატიკა ეკონომისტებისთვის (მეორე გამოცემა). თბ., „ახალი ივერიონი“;
4. თოფურია ს., ხოჭოლავა ვ., გაბიძაშვილი მ., მაჭარაშვილი ნ., (1991). უმაღლესი მათემატიკა. თბილისი.

Calculation of customer savings Using the definite integral

Maka Lomtadze
Doctor of Education, Associate Professor.
Kutaisi University; Business and Technology University, maka.lomtadze@unik.edu.ge

KEY WORDS: *definite integral; area of curvilinear trapezoid; demand function; consumer savings*

J.E.L. classification: C1, D60 DOI: https://doi.org/10.52244/ep.2024.27.07

For citation: Lomtadze M., (2024) Calculation of customer savings using the definite integral (in Georgian). Economic Profile, Vol. 19, 1(27), p. 85–90. DOI: https://doi.org/10.52244/ep.2024.27.07

Summary: The article focuses on the application of mathematical methods in economics, in particular discussing economic problems that are easily solved using definite integral. The purpose of the article is to show students the way and opportunity to use mathematical methods to solve economic problems. To this end, the article discusses and analyzes several economic tasks in detail, which will be interesting and easy for students to master

The geometric content of the definite integral is that it represents the area of a curved trapezoid, which is bounded by the given $y = f(x)$ with the graph of the function $x = a$, $x = b$ with lines and I connected the ox axis to the function of the consumer trading at the Q_0 level and calculated the consumer savings using the same method.

I used the Newton-Leibnitz formula to calculate the definite integral:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Where $F(x)$ is the primal function of the given function $f(x)$.

I divided the interval $[O, Q_0]$ into n equal parts with points: Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Where $0 < Q_1 < Q_2 < ... < Q_n = Q_0$, I have marked the length of each segment with the symbol ΔQ

$$\Delta Q = Q_1 = Q_2 - Q_1 = ... = Q_i - Q_{i-1} = ... = Q_n - Q_{n-1} = \frac{Q_0}{n}$$

I have considered the demand function $P = f_D(Q)$, which represents the unit price of the product when Q quantity of consumer goods is sold, which can be said to be almost a decreasing function with respect to the variable Q. Assume that P_0 is the price per unit when Q_0 quantity is demanded and $P_0 = f_D(Q_0)$, and the demand for the product is equal to Q_1 units, the unit price is $f_D(Q_1)$ and $\Delta Q = \frac{Q_0}{n} = Q_1$ number of products are sold.

The amount to be paid for the purchase of ΔQ quantity of products will be equal to $f_D(Q_1)\Delta Q$. Similarly, when the demand for a good is equal to Q_1 units and the unit price is $P_0 = f_D(Q_0)$, the same ΔQ amount of products can be purchased for $P_0\Delta Q$ money. In the first and second cases, the difference in savings of buyers is equal to $f_D(Q_1)\Delta Q - P_0\Delta Q = [f_D(Q_1) - P_0]\Delta Q$. This savings is numerically equal to the area over the interval $[O, Q_1]$. I did the same calculation for all the obtained intervals and calculated the savings in each interval.

I added up all these savings and got the total savings $[O, Q_0]$ in the interim.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f_D\left(Q_{i+1}\right)-P_0\right]\Delta Q$$

which is geometrically plotted on Fig. 1 and represents the area.

Considering the limit of this image when $n \to \infty$ and connecting it to the definition of the definite integral, we can say that it is the definite integral in the interval $\left[O,Q_0\right]$:

$$\left(CS\right)=D\left(Q_0,P_0\right)=\int_0^{Q_0}\left[f_D\left(Q\right)-P_0\right]dQ$$

Economists call this quantity the consumer's saving when trading at the Q_0 level, which represents the consumer's savings when purchasing Q_0 quantity of products at a price of P_0 units.

At the end of the article, I discussed 2 problems, where I calculated the customer's $\left(CS\right)$ savings using a definite integral.

References:

1. Thomas G.B., Weir M.D., Hass J., (2014) Thomas' Calculus: Early Transcendentals, Thirteenth Edition, Pearson, New York.
2. Chiang A., (2005) Fundamental Methods of Mathematical Economics", The McGrow-Hill Company, International edition. - 688 pp
3. Natroshvili D., and etc. (2008) Mathematics for Economists (Second Edition). Tbilisi, "Akhali Iveironi". -577 pg.;
4. Topuria S., Khocholava V., Gabidzashvili M., Macharashvili N., (1991) Higher Mathematics. Tbilisi 1991.